

La matemàtica
dels cartogrames geogràfics

La matemàtica dels cartogrames geogràfics

Discurs de presentació de Joan de Solà-Morales i Rubió
com a membre numerari de la Secció de Ciències
i Tecnologia, llegit el dia 17 de juny de 2013

Barcelona, 2015



Institut
d'Estudis
Catalans

SECCIÓ DE CIÈNCIES
I TECNOLOGIA

Biblioteca de Catalunya. Dades CIP

Solà-Morales i Rubió, Joan de

La Matemàtica dels cartogrames geogràfics : discurs de presentació de Joan de Solà-Morales i Rubió com a membre numerari de la Secció de Ciències i Tecnologia, llegit el dia 17 de juny de 2013

Bibliografia

ISBN 9788499652238

I. Institut d'Estudis Catalans. Secció de Ciències i Tecnologia II. Títol

1. Cartografia — Metodologia 2. Cartografia — Matemàtica

528.9

528.9:51

© Joan de Solà-Morales i Rubió

© 2015, Institut d'Estudis Catalans, per a aquesta edició

Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició: febrer del 2015

Text revisat lingüísticament per la Unitat de Correcció del Servei Editorial de l'IEC

Disseny de la coberta: Azcunce | Ventura

Imprès a Open Print, SLL

ISBN 978-84-9965-223-8

Dipòsit Legal: B 4602-2015

Són rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del *copyright*, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment i suport, incloent-hi la reprografia i el tractament informàtic, la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec comercial, la inclusió total o parcial en bases de dades i la consulta a través de xarxa telemàtica o d'Internet. Les infraccions d'aquests drets estan sotmeses a les sancions establertes per les lleis.

1. ELS CARTOGRAMES GEOGRÀFICS

L'objectiu d'aquesta presentació és posar de manifest la matemàtica que hi ha darrere de la construcció dels *cartogrames geogràfics*, que són representacions geogràfiques en què cada regió o cada país apareix amb una àrea proporcional a alguna magnitud que es vulgui destacar. Per exemple, en el cartograma que apareix a la figura 1, que prové del web del projecte Worldmapper [11], l'àrea de cada estat és proporcional al nombre dels seus habitants, segons dades de l'any 2002.

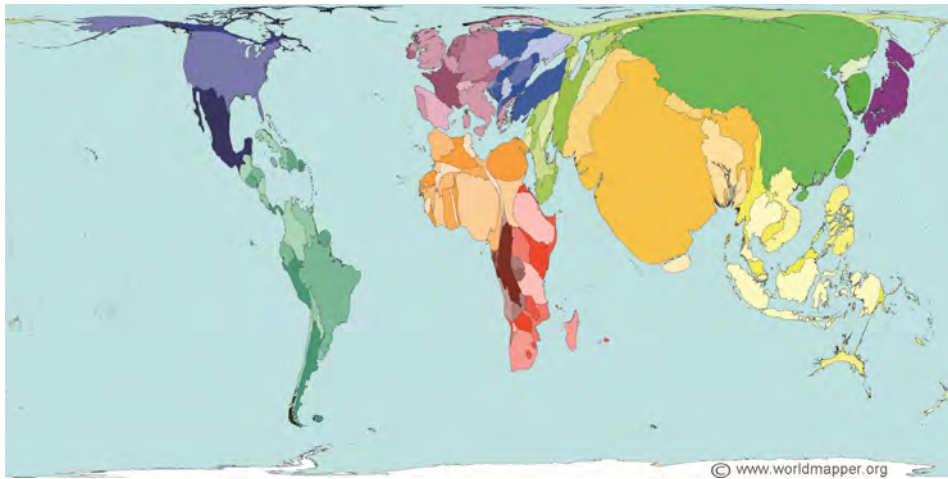


FIGURA 1. Cartograma del nombre d'habitants (2002).

Els cartogrames geogràfics, com es pot veure, són formes vistoses i eficaces de posar de manifest, de vegades de manera espectacular, diferències o similituds entre regions o entre el repartiment de certes magnituds. I el seu ús s'ha començat a estendre en els darrers anys gràcies a potents programes informàtics de llicència lliure que serveixen per a calcular-los i dibuixar-los, fonamentalment els basats en l'*algorisme equalitzador de densitats*, que explicarem més endavant, i a la seva implementació informàtica, iniciada per M. T. Gastner i M. E. J. Newman en el seu treball de l'any 2004 [8]. Abans d'aquell any l'ús de cartogrames entre els geògrafs ja era una pràctica força freqüent, però el procediment era més o menys heurístic i combinatori, d'apa-

rença menys atractiva, com el de la figura 2, en què es representa el producte interior brut dels estats, segons dades de l'any 1976.

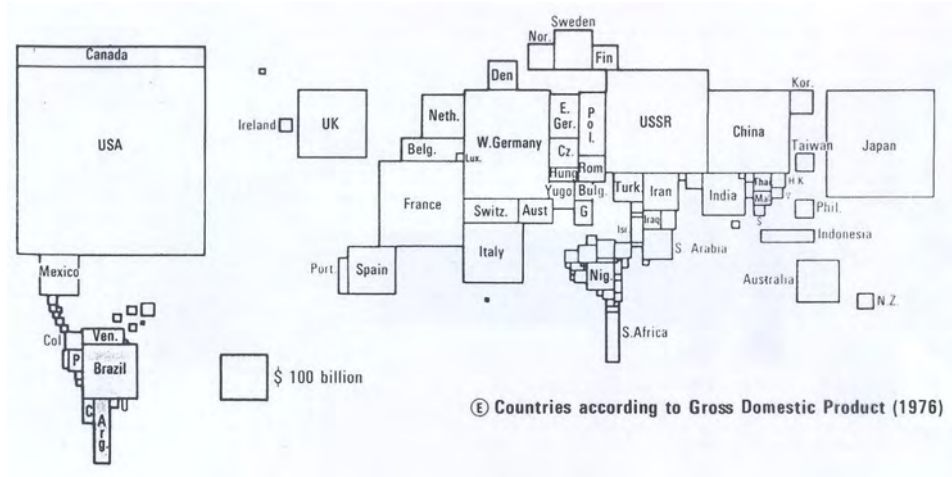


FIGURA 2. Cartograma del PIB del 1976.

És interessant de notar, pel que diré després, que en aquest cartograma sembla que Àustria no tingui frontera amb Hongria ni amb l'antiga Txecoslovàquia, quan en realitat sí que en tenia, i que Polònia tingui frontera amb Romania, quan en realitat no en tenia. Aquesta propietat, que en terminologia matemàtica anomenem *falta de contigüitat* quan parlem d'una transformació que converteix un mapa en un altre, els geògrafs l'han descrit dient que els cartogrames *perdién contigüitat*. Em permeto insistir en aquesta propietat perquè els treballs que el meu grup de recerca i jo mateix hem fet sobre aquestes transformacions han posat especialment l'accent en aquest punt, que ha resultat precisament el més difícil d'analitzar.

Com dèiem, doncs, els cartogrames geogràfics també existien abans de l'algorisme equalitzador de densitats, però tenien una naturalesa més aviat combinatoria, amb alguns defectes, com la possible pèrdua de contigüitat a què ens hem referit. Tot i això, amb els cartogrames geogràfics es feien treballs geogràfics importants, com els fets per D. Dorling i els seus col·laboradors a la Universitat de Sheffield, entre els quals voldríem esmentar el llibre de 1996 del mateix Dorling [5],

l'article recopilatori de W. R. Tobler (2004) [10] i el llibre recent (2013) de B. Hennig [9].

Però la gran revolució en la confecció dels cartogrames es va produir l'any 2004 amb l'aparició dels mètodes ja esmentats de Gastner i Newman. Aquests mètodes van donar lloc a les publicacions del projecte Worldmapper [11] i també al bonic llibre de recull d'aquestes imatges de Dorling, Newman i A. Barford *The Atlas of the Real World* (2008) [6]. L'algorisme equalitzador de densitats ja havia estat analitzat, encara que de manera preliminar, des del punt de vista matemàtic, l'any anterior en un article [2] i encara abans en una comunicació en un congrés [1].

Com veiem, doncs, en els cartogrames geogràfics es posa èmfasi en el valor de les àrees de les regions representades, perquè aquests valors es volen fer proporcionals a certes magnituds que es volen destacar. Potser és el moment, doncs, de passar revista i examinar com s'ha tractat el problema de les àrees en la cartografia tradicional i les aportacions que s'hi han fet des del punt de vista matemàtic. La representació més coneguda de l'esfera terrestre és la projecció de Mercator, presentada per aquest geògraf i cartògraf flamenc el 1569. Encara que des del punt de vista cartogràfic és una representació que pot ser molt criticable, el fet és que és la que dóna els perfils i les formes que tots tenim al cap quan pensem en països, illes i continents, i la que és a la base del mapa que, sens dubte, és el més consultat avui en dia, el de Google Maps. Sense entrar en els detalls geomètrics precisos, la projecció de Mercator s'obté projectant primer sobre un cilindre i desenvolupant després el cilindre en un pla. Les distorsions de longituds i àrees es fan més agudes quan ens allunyem de l'equador, i per aquesta raó la majoria de les reproduccions d'aquesta projecció abracen només un rang moderat de latituds. El mapa que reproduïm a la figura 3, en canvi, extret de la Viquipèdia, abraça un rang força gran.

En aquest mapa es veu la gran deformació de les àrees. Per exemple, sembla que l'Antàrtida tingui gairebé més superfície que la resta de continents, i això que no hi és representada tota. També és enganyosa la comparació entre les superfícies de l'illa de Groenlàndia i el

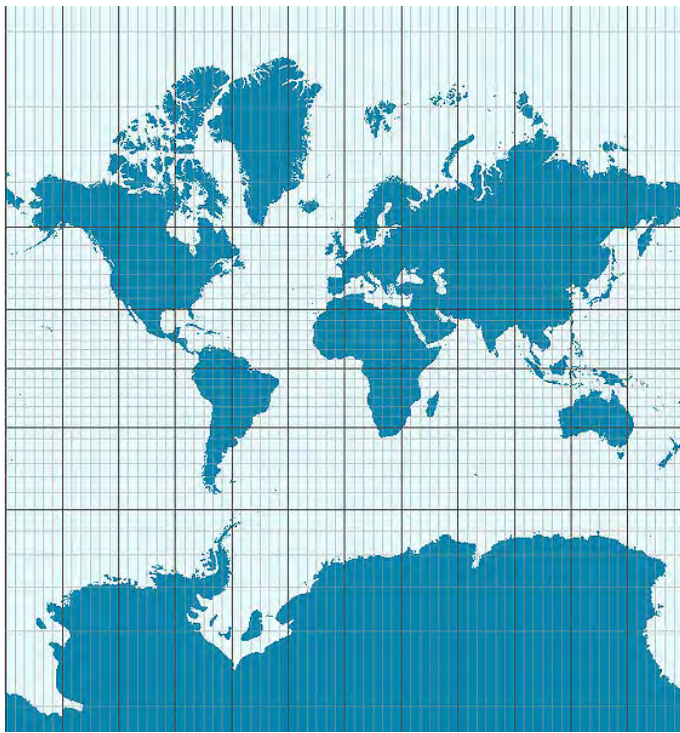


FIGURA 3. Projeció de Mercator.

continent d' Austràlia: les dades reals són que Groenlàndia ocupa uns dos milions de quilòmetres quadrats, mentre que Austràlia n'ocupa més de set. I això no és el que sembla en el mapa...

Aquesta limitació de la projecció de Mercator ja és coneguda des dels temps en què va ser proposada. El planisferi de Mercator té altres avantatges, però no pas que preservi les proporcions de les àrees. Els mapes que conserven aquesta proporció reben el nom de *projeccions equivalents*. Potser una de les més conegudes és la projecció cilíndrica equivalent de Lambert, que reproduïm a la figura 4.

L'exemple d'aquesta projecció en comparació de la projecció de Mercator ens insinua la possibilitat, que finalment resultarà certa, que podem fer transformacions en un mapa de manera que les àrees de certes regions acabin valent allò que nosaltres volem. Aquesta convicció és la que dóna lloc al problema matemàtic dels cartogrames geogràfics.

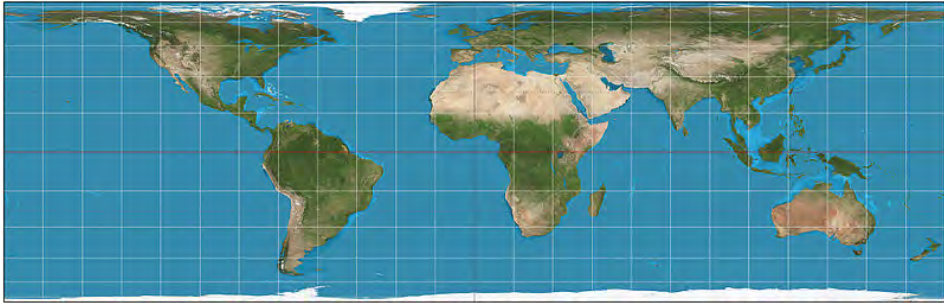


FIGURA 4. Projectió equivalent de Lambert.

Per adonar-nos del poder d'aquestes imatges, reproduïm a les figures 5 i 6 dos cartogrames prou colpidors, extrets també del projecte Worldmapper [11].

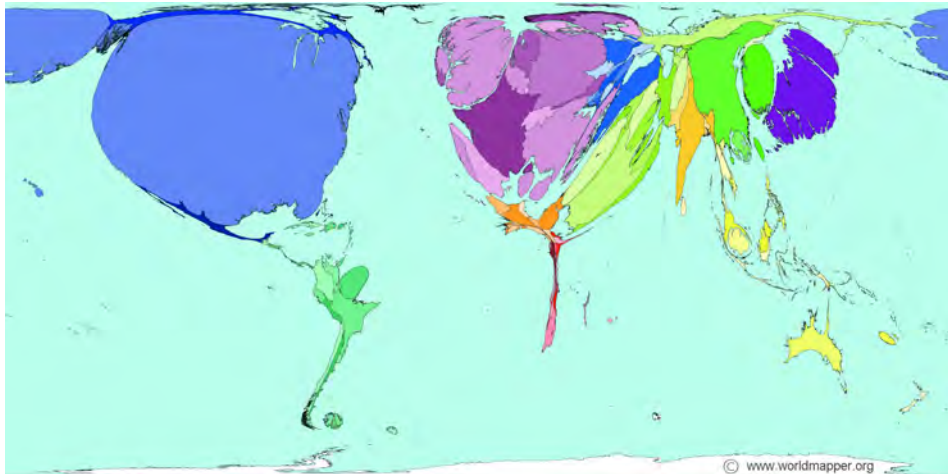


FIGURA 5. Despeses militars (2002).

Finalment, reproduïm la figura 7 cedida per la Societat Catalana de Química, que no és un cartograma geogràfic però que és una cosa molt semblant, ja que les àrees de les diferents regions que s'hi representen tenen un significat. En aquest cas, cada element químic de la taula periòdica dels elements apareix en una regió que és una deformació del típic rectangle i l'àrea de la regió deformada és proporcional a la presència de l'esmentat element a la Terra.

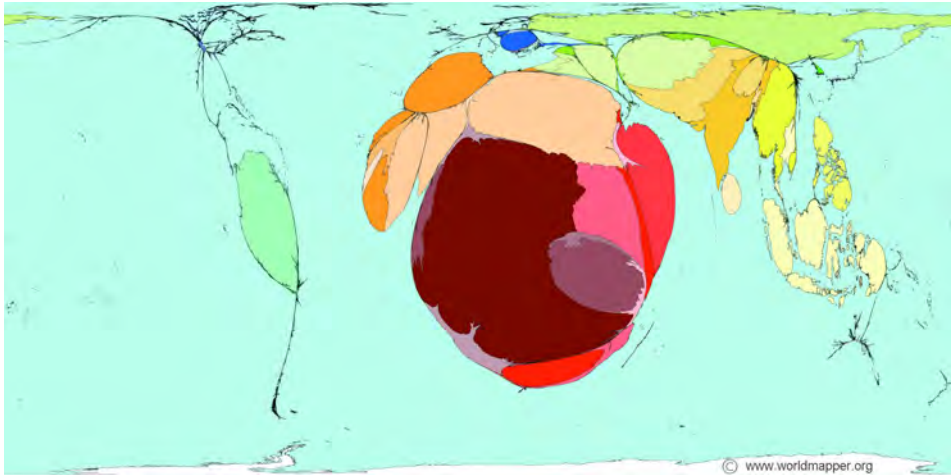


FIGURA 6. Nombre de morts a causa d'una guerra (2002).

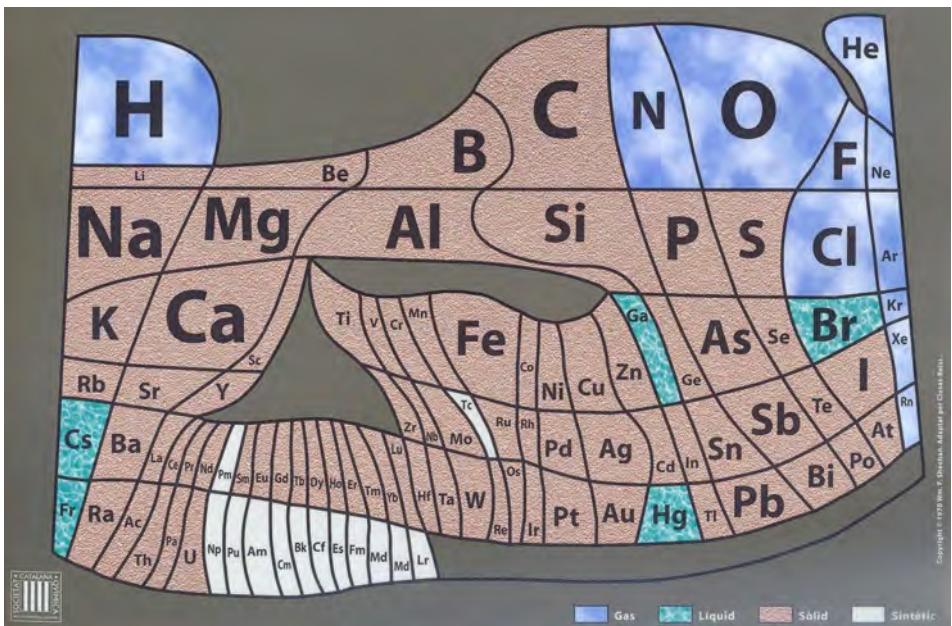


FIGURA 7. Els elements químics d'acord amb la seva abundància a la Terra.

2. CARTOGRAMES I TRANSFORMACIONS AMB UN JACOBITÀ DONAT

La figura 8 reproduceix un cartograma realitzat per A. Avinyó sobre la població de Catalunya per comarques.

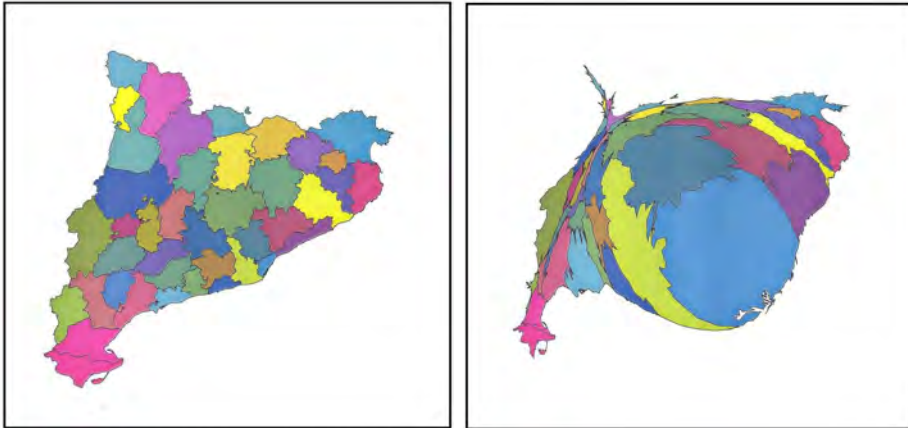


FIGURA 8. Habitants per comarques (Avinyó, 2010).

La figura ens permet introduir la notació que seguirem a partir d'ara. Suposem que R és un rectangle del pla x, y i que volem fer una transformació $\mathbf{T} : R \rightarrow R$ que envii un punt de coordenades (x, y) a un punt de coordenades (u, v) que seran, naturalment, funció de x i y : $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Qualsevol imatge que tinguem en les coordenades x, y quedarà deformada després de la transformació \mathbf{T} , com ara el que es veu a la figura 9.

Ens preguntem ara com es deformen les àrees quan passem d'una figura a l'altra. La resposta ve donada pel jacobità, o sigui, la funció següent:

$$J(x, y) = \det D\mathbf{T}(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix},$$

que ens dóna en cada punt el factor pel qual les àrees es multipliquen.

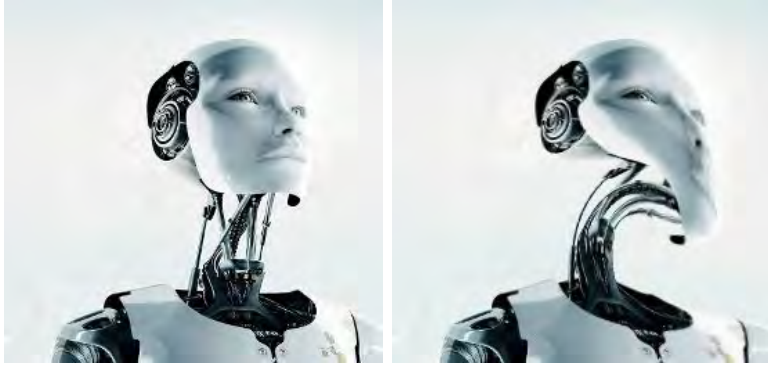


FIGURA 9. Imatge original i imatge deformada.

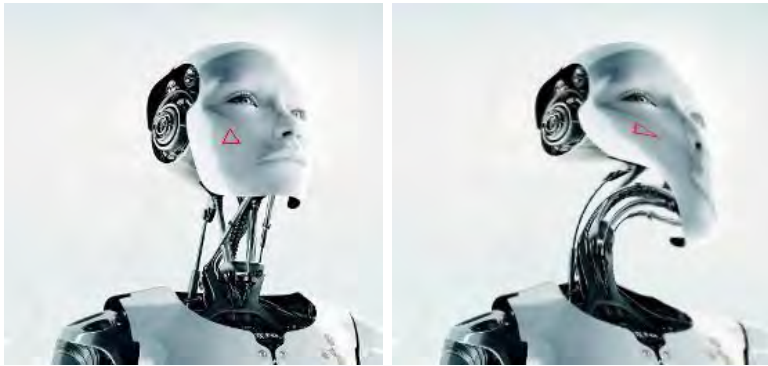


FIGURA 10. Relació entre les àrees dels petits triangles.

Això es veu reflectit a la figura 10, en la qual hem dibuixat un petit triangle a la imatge original i el triangle transformat en l'altra imatge. Si la transformació és prou suau, diferenciable, per ser més precisos, la imatge d'un triangle prou petit (*infinitesimal*) a l'original és també un triangle (*infinitesimal*) a la imatge deformada, i la relació entre les àrees d'aquests dos triangles és el jacobià que acabem de considerar.

Quan volem construir un cartograma, definim a la imatge original una funció $f(x, y)$ a cada punt. Si en un punt aquesta funció pren un valor més gran que 1, per exemple, és que volem que la regió que envolta aquell punt augmenti d'àrea després de realitzar la transformació, i si $f(x, y) < 1$, és que volem que l'àrea s'encongeixi. I voldrem trobar una transformació $(x, y) \mapsto (u, v)$ que tinguin un jacobià igual

a $f(x, y)$. En definitiva, el que voldríem és trobar una solució de l'equació en derivades parcials següent, en la qual les incògnites són les funcions $u(x, y)$ i $v(x, y)$:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = f(x, y),$$

acompanyada d'unes condicions de contorn adients a fi que la imatge del rectangle R on està definida la imatge original coincideixi amb el mateix rectangle i que no hi hagi regions de la imatge inicial que surtin del rectangle en considerar la imatge transformada.

Per aquesta raó, aquest problema té una restricció força natural, que és

$$\int_R f(x, y) \, dx dy = \int_R 1 \, dx dy = \text{àrea de } R,$$

perquè no podem pas pretendre encabir de nou en el rectangle R una imatge si de mitjana la dilatació és més gran que la unitat. Si aquesta restricció no es compleix, el problema no pot pas tenir solució.

No és difícil de veure que, en canvi, si té una solució, necessàriament en té moltes. Això és degut al fet que hi ha moltes transformacions que transformen el rectangle R en si mateix i que conserven totes les àrees. Component la transformació \mathbf{T} amb qualsevol d'aquestes transformacions que conserven les àrees, obtindríem noves solucions de l'equació en derivades parcials que hem plantejat.

L'algorisme equalitzador de densitats es basa en els fenòmens físics de conducció de la calor (o difusió d'una densitat) i d'advecció d'una densitat. La conducció de la calor és el fenomen pel qual les regions més calentes d'un material cedeixen calor a les regions més fredes, de manera que, al cap del temps, la temperatura del cos acaba sent homogènia. Això és el mateix que passa amb la difusió d'una densitat, per exemple, la densitat d'un cert component químic que està dissolt en un líquid en repòs: per causa de la difusió, les zones on hi ha més concentració d'aquest component químic acaben cedint una part d'aquesta concentració a les zones on la densitat és menor i, finalment, la densitat acaba sent homogènia.

En canvi, l'advecció és un fenomen de transport ben diferent. La densitat d'una espècie química dissolta en un fluid pot variar respecte al temps però simplement perquè el fluid es mou amb una certa velocitat \mathbf{V} , que pot ser diferent en cada punt i pot ser que tampoc no sigui estacionària. D'aquesta manera, si el camp de velocitats fa que en una certa zona les partícules del fluid (pensem en un gas, per exemple) convergeixin, en el sentit que s'acosten les unes a les altres, aleshores la densitat augmentarà en aquella zona, i passarà el contrari si les partícules divergeixen.

La idea de l'algorisme equalitzador de densitats consisteix a mimetitzar mitjançant un procés d'advecció el que ocorre en un procés de difusió. Des del punt de vista matemàtic, això té una expressió molt simple. L'evolució al llarg del temps d'una densitat que varia a causa de la difusió compleix l'equació en derivades parcials

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot (\nabla \rho) = 0,$$

on hem suposat que el coeficient de difusió val la unitat.

En canvi, una densitat sotmesa a advecció al llarg d'un camp de velocitats \mathbf{V} varia segons la llei

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0.$$

És ben senzill, per tant, d'entendre que el procés d'advecció té els mateixos resultats que el procés de difusió si ρ compleix l'equació de la difusió i s'ha pres

$$\mathbf{V} = -\frac{\nabla \rho}{\rho}.$$

Dit d'una altra manera: si tenim una densitat inicial no homogènia $f(x, y)$ sotmesa a difusió, al cap d'un temps aquesta evolucionarà i es convertirà en la seva mitjana, s'equalitzarà. Si coneixem l'evolució $\rho(x, y, t)$ d'aquesta mateixa densitat i considerem el camp de velocitats $\mathbf{V} = -\nabla \rho / \rho$, el resultat d'aquesta equalització serà el mateix que si les partícules s'haguessin mogut amb aquest camp de velocitats.

L'*algorisme equalitzador de densitats* consisteix a fer moure els punts del mapa segons les velocitats $\mathbf{V} = -\nabla\rho/\rho$, després de resoldre l'equació de la difusió, i a deixar-los-hi movent-se un temps (en teoria) infinit. D'aquesta manera, les zones on inicialment $f(x, y)$ era gran es dilataran, i les zones on inicialment $f(x, y)$ era petita s'encongirán, que és el que volíem.

Escrit d'una manera més precisa, suposem R donat i $f(x, y) > 0$ també, de manera que $\int_R f(x, y) dx dy = \text{àrea}(R)$. Donat $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$ a R , definim $\mathbf{T}(\mathbf{z}_0)$ pel procediment següent:

$$\begin{cases} \rho_t = \nabla^2 \rho & \text{a } R, \text{ per a } t > 0, \\ \rho_\nu = 0 & \text{a } \partial R, \text{ per a } t > 0, \\ \rho(x, y, 0) = f(x, y), \\ \mathbf{z}'(t) = -\frac{\nabla\rho(\mathbf{z}(t), t)}{\rho(\mathbf{z}(t), t)}, & \text{per a } t > 0, \\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \\ \mathbf{T}(\mathbf{z}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t). \end{cases}$$

Es tracta, doncs, de resoldre, primer, una equació en derivades parcials i, després, un sistema d'equacions diferencials ordinàries.

Una demostració una mica formal que la transformació així definida té el jacobiana que volem és la següent: definim, en primer lloc, $\mathbf{V}^t(\mathbf{w}) = -\nabla\rho(\mathbf{w}, t)/\rho(\mathbf{w}, t)$ i \mathbf{T}^t per $(d/dt)\mathbf{T}^t(\mathbf{z}) = \mathbf{V}^t(\mathbf{T}^t(\mathbf{z}))$. Pel teorema de Liouville,

$$\frac{d}{dt} \ln \det (D\mathbf{T}^t(\mathbf{z})) = \nabla \cdot \mathbf{V}^t(\mathbf{T}^t(\mathbf{z})).$$

Per la definició de \mathbf{V}^t i com que ρ satisfà l'equació de la calor,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V}^t(\mathbf{w}) &= -\frac{\nabla^2 \rho(\mathbf{w}, t)}{\rho(\mathbf{w}, t)} + \left(\frac{\nabla \rho(\mathbf{w}, t)}{\rho(\mathbf{w}, t)} \right)^2 = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \ln \rho(\mathbf{w}, t) - \mathbf{V}^t(\mathbf{w}) \cdot (\nabla \ln \rho(\mathbf{w}, t)). \end{aligned}$$

Per tant, $(\nabla \cdot \mathbf{V}^t)(\mathbf{T}^t(\mathbf{z})) = -(d/dt) (\ln \rho(\mathbf{T}^t(\mathbf{z})))$. Aleshores,

$$\frac{\det (D\mathbf{T}^t(\mathbf{z}))}{\det (D\mathbf{T}^0(\mathbf{z}))} = \frac{\rho(\mathbf{T}^0(\mathbf{z}), 0)}{\rho(\mathbf{T}^t(\mathbf{z}), t)}.$$

Finalment, el resultat se segueix, ja que $\mathbf{T}^0(\mathbf{z}) \equiv \mathbf{z}$, $\rho(0, \mathbf{z}) = f(\mathbf{z})$ i $\rho(\mathbf{y}, t) \rightarrow 1$ quan $t \rightarrow \infty$.

L'anterior càlcul formal pot fer-se rigorós si la densitat $f(x, y)$ és una funció que pertany a alguna classe de Hölder $\mathcal{C}^\alpha(R)$. En aquest cas, \mathbf{T} resulta que és de classe $\mathcal{C}^{1+\alpha}$.

Les dificultats deriven del fet que la constant de Lipschitz de \mathbf{V}^t tendeix a infinit massa de pressa quan $t \rightarrow 0$ si $f(x, y)$ no està en una classe de Hölder. En les classes de Hölder es pot usar la desigualtat

$$\|\nabla \rho(t, \cdot)\|_{\mathcal{C}^{1,\beta}} \leq \frac{C}{t^{1-(\alpha-\beta)/2}} \|f(\cdot)\|_{\mathcal{C}^\alpha},$$

deguda a V. A. Solonnikov i V. S. Belonosov (1979), que nosaltres vam aprendre de X. Mora (1983) (vegeu [2] pel que fa als detalls), que permet d'assegurar que aquest problema no té conseqüències greus.

Tot i aquest resultat positiu, la situació no és gaire falaguera si es vol aplicar aquesta teoria al cas dels cartogrames geogràfics, en els quals $f(x, y)$ és una funció constant a trossos, és a dir, que de fet no és ni contínua. L'estudi del cas constant a trossos és l'objecte de la secció 4, més avall.

3. CARTOGRAMES A CATALUNYA

Els cartogrames s'han emprat també per a usos específics de descripció de característiques que no són necessàriament mundials, sinó nacionals o regionals. A Catalunya, el geògraf J. Feliu, del Departament de Geografia de la Universitat de Girona (UdG), manté des de fa uns quants anys un blog titulat *El mapa com a excusa* [7], en el qual exposa diversos cartogrames relacionats amb Catalunya realitzats amb l'algorisme d'equalització de densitats.

Per cortesia de l'autor, a qui agraïm els permisos, reproduïm a continuació alguns dels cartogrames del seu blog. En el primer, el de la figura 11, les comunitats autònomes d'Espanya apareixen amb una àrea proporcional al seu producte interior brut.

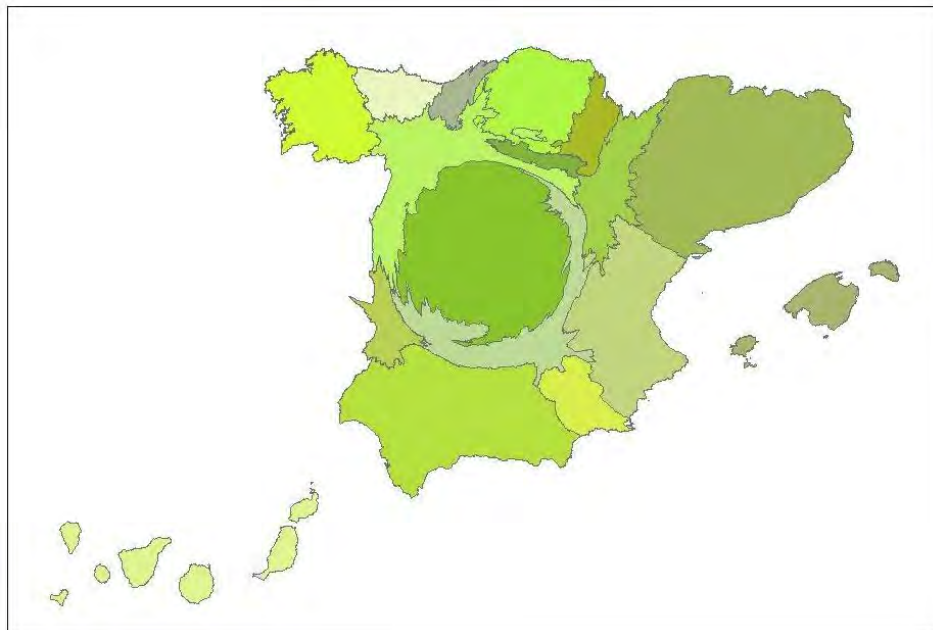


FIGURA 11. Cartograma de les comunitats autònomes d'Espanya, producte interior brut, 2010.

FONT: INE.

ELABORACIÓ: Feliu, Departament de Geografia, UdG.

Els dos cartogrames de la figura 12 corresponen a una anàlisi dels resultats electorals de les eleccions al Parlament de Catalunya celebrades el 2012. En els dos cartogrames les quatre circumscripcions electorals catalanes apareixen amb una àrea proporcional al nombre d'habitants que registra el cens electoral en cadascuna.

En els tres cartogrames de les figures 13-15, realitzats en col·laboració amb Avinyó, del Departament de Matemàtica Aplicada i Informàtica de la UdG, Catalunya es compara globalment amb la resta d'Espanya i amb altres estats d'Europa, cosa que dóna lloc, també, a imatges interessants i significatives.

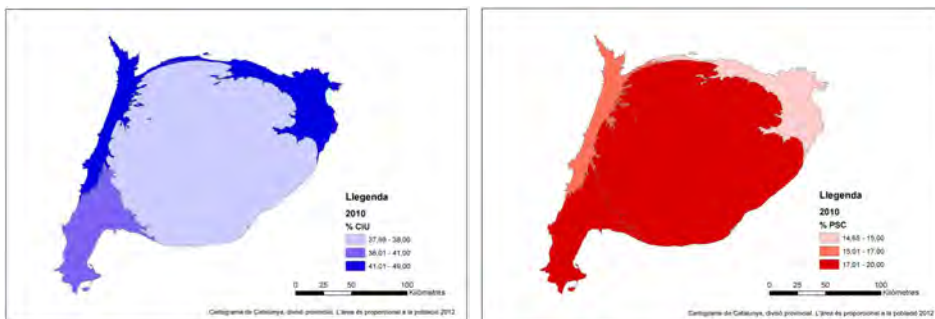


FIGURA 12. Anàlisi electoral (parcial). Resultats de CiU (esquerra) i del PSC (dreta) a les eleccions del Parlament de 2010 (percentatges sobre el total provincial).

ELABORACIÓ: Feliu, Departament de Geografia, UdG, novembre de 2012.



FIGURA 13. Cartograma del producte interior brut (PIB en milions de dòlars, 2012).

FONT: Eurostat, INE, Idescat.

ELABORACIÓ: Feliu i Avinyó, UdG.



FIGURA 14. Cartograma de les exportacions (en milions d'euros, 2012).

FONT: Eurostat, INE, Idescat.

ELABORACIÓ: Feliu i Avinyó, UdG.

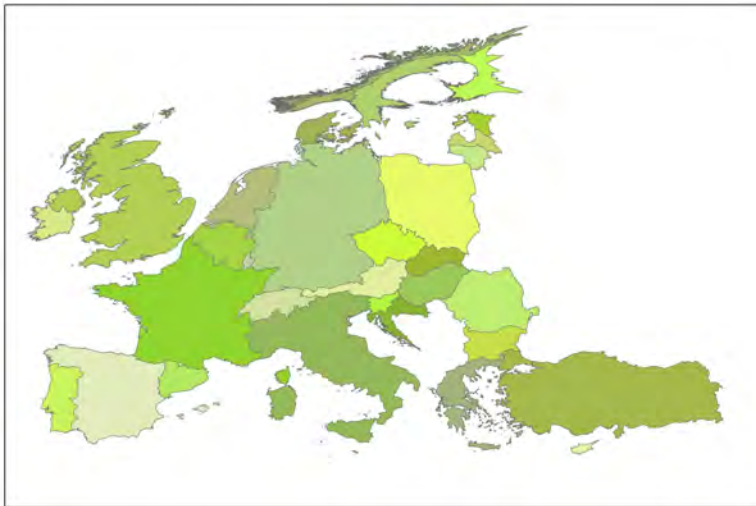


FIGURA 15. Hipòtesi de Catalunya com a nou Estat d'Europa. Cartograma de la població (nombre d'habitants, 2012).

FONT: Eurostat, INE, Idescat.

ELABORACIÓ: Feliu i Avinyó, UdG.

4. CONTINUÏTAT I CONTIGÜITAT

Aquesta secció final està dedicada a explicar els nostres resultats més recents ([3], [4]) sobre el problema de la continuïtat de la transformació que s'obté amb l'algorisme equalitzador de densitats.

Des del punt de vista de l'anàlisi de l'algorisme, el problema que vam creure que quedava pendent era demostrar que l'algorisme estava ben plantejat en casos en què la densitat $f(x, y)$ no és una funció contínua, sinó una funció constant a trossos.

I el problema de la continuïtat està completament lligat al problema de la unicitat de solució de les equacions diferencials ordinàries que hi estan involucrades. Això es veu potser més clar en l'exemple següent, en el qual es considera un procediment diferent per a construir una transformació amb un jacobià donat. En la literatura matemàtica aquest procediment es coneix com el *procediment de Knothe-Rosenblatt*.

Es construeix

$$\Phi : [0, a] \times [0, b] \rightarrow [0, a] \times [0, b]$$

mitjançant la fórmula

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} \int_0^x \int_0^b f(\xi, \eta) d\eta d\xi \\ \frac{b \int_0^y f(x, \eta) d\eta}{\int_0^b f(x, \eta) d\eta} \end{pmatrix}.$$

En aquesta fórmula ja es veu clarament, per exemple, que si $f(x, y)$ no és contínua, no hi ha cap garantia que sigui continu el numerador de $v(x, y)$. I així és, efectivament. En la figura 16 es veu a l'esquerra un quadrat dividit en quatre quadrats més petits, i definim $f(x, y)$ de manera que sigui constant en aquests quadrats petits i prengui, respectivament, els valors $1/2$, $3/2$, $3/2$ i $1/2$. En el quadrat imatge, a la dreta, les fronteres dels quatre quadrats s'han deformat de manera

que s'ha perdut la continuïtat en el punt central o , equivalentment, el punt central s'ha convertit en tot un segment vertical. Que un punt es converteixi en tot un segment és un fenomen similar al de la pèrdua d'unicitat del problema de valor inicial per a equacions diferencials ordinàries.

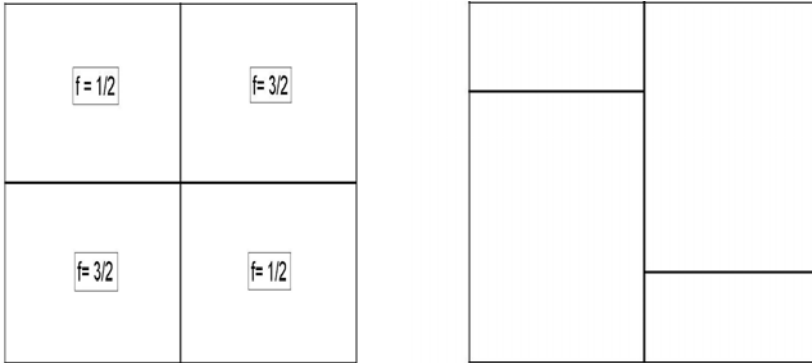


FIGURA 16. Una transformació per l'algorisme de Knothe-Rosenblatt.

Els nostres resultats ([3] i [4]) mostren la continuïtat de la transformació $\mathbf{T}(x, y)$ per a densitats $f(x, y)$ que inclouen, com a mínim, funcions constants en polígons del pla, que és el cas pràctic per als cartogrames geogràfics.

Si estem interessats en la continuïtat respecte a l'estat inicial o en la unicitat de solució $\mathbf{z}(t)$ per a t proper a 0 d'un problema amb valor inicial $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$, podem restringir-nos a considerar \mathbf{z} proper a \mathbf{z}_0 . Això és una invitació a usar idees de l'anàlisi asimptòtica. La situació està representada a la figura 17.

Si es magnifiquen les variables $\mathbf{z} = (x, y)$ prop de $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$ i la variable t prop de $t = 0$ en les proporcions apropiades, s'acaba obtenint un problema similar però a tot el pla i amb una funció $f(x, y)$ que és constant en sectors angulars centrats a (diguem) $\mathbf{z}_0 = 0$.

En aquest problema magnificat, podem demostrar que el problema està ben plantejat i que, en particular, hi ha unicitat de solució. En les noves variables el sistema d'equacions diferencials ordinàries té la forma particular

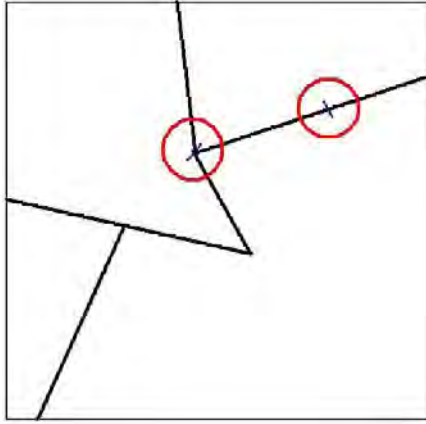


FIGURA 17. $\mathbf{z}(t)$ proper a \mathbf{z}_0 , en casos en què \mathbf{z}_0 és un punt de discontinuïtat.

$$\mathbf{z}'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{H}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{z}(t)\right),$$

amb una funció vectorial fitada $\mathbf{H}(\mathbf{w})$ independent del temps. Està prou clar que la part de la dreta tindrà una constant de Lipschitz com $1/t$, que és una funció no integrable. Però vam poder demostrar el resultat següent:

Teorema (Avinyó, M. València i J. Solà-Morales, 2012, [4]): Si $\mathbf{F}(\mathbf{z}, t)$ és contínua per a $0 < t \leq \varepsilon$ i $0 \leq |\mathbf{z}| \leq \varepsilon$, i

$$|\mathbf{F}(\mathbf{z}, t)| < \frac{M}{\sqrt{t}},$$

$$(\mathbf{F}(\mathbf{z}_1, t) - \mathbf{F}(\mathbf{z}_2, t)) \cdot (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) \leq L \frac{|\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1|^2}{t}$$

per a $t > 0$ i $L < 1/2$, aleshores el problema de valor inicial per a $\mathbf{z}' = \mathbf{F}(\mathbf{z}, t)$ està ben plantejat per a $t > 0$.

Un antecedent d'aquest teorema pot trobar-se en l'exercici 6.8, «One-sided generalization of Nagumo's criterion», del llibre *Ordinary Differential Equations* de P. Hartman (1964), però amb algunes variants que volem destacar: en primer lloc, que allà es demana que

$\mathbf{F}(\mathbf{z}, t)$ sigui contínua fins a $t = 0$, i això no seria aplicable al nostre cas, i, en segon lloc, en canvi, que la condició $L < 1/2$ s'afebleix en el seu cas a $L < 1$. També podem dir que la condició $L < 1/2$ és necessària, perquè coneixem un contraexemple fàcil amb $L = 1/2$.

En el cas que ens ocupa, per a $\mathbf{z}' = \mathbf{H}(\mathbf{z}/\sqrt{t})/\sqrt{t}$ aquestes hipòtesis simplement demanen: $|\mathbf{H}|$ fitada i $D\mathbf{H} + D\mathbf{H}^T < 2L < 1$. En el nostre cas, aquestes hipòtesis cal comprovar que es verifiquen a partir de l'equació en derivades parcials. No donarem detalls sobre aquest punt.

Només direm, per a posar de manifest que els nostres resultats no deixen gaire marge de maniobra, que hi ha un cas senzill en el qual la funció $\mathbf{H}(\mathbf{w})$ és fàcil de calcular. És el cas que $\mathbf{H}(w_1, w_2) = H(w_1)$. En aquest cas, H depèn d'un paràmetre $C > 1$. El que s'ha de comprovar és que $H'(w_1) < 1/2$. Els gràfics que surten són els següents, que ja es veu que s'acosten al valor límit $H' = 1/2$.

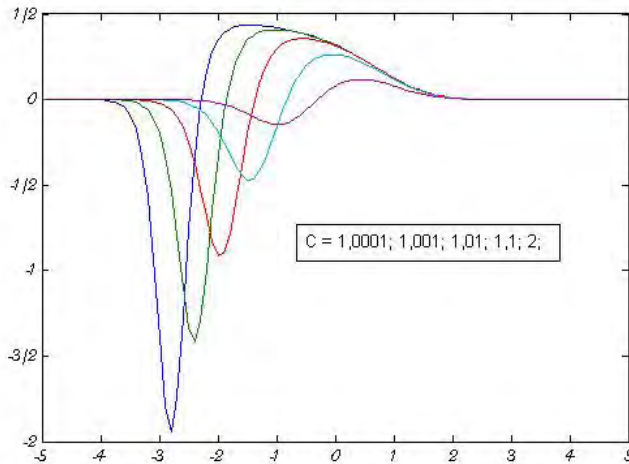


FIGURA 18. Gràfics de $H'(w_1)$ per a diferents valors de C .

REFERÈNCIES

- [1] AVINYÓ, A.; SOLÀ-MORALES, J.; VALÈNCIA, M. «Transformations with a Given Jacobian». A: MONTENEGRO, R. [et al.] (ed.). *Actas: XVI CEDYA Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, VI CMA Congreso de Matemática Aplicada, las Palmas de Gran Canaria, 21-24 septiembre 1999*. Vol. 1. Las Palmas de Gran Canaria: Universidad de las Palmas, 1999, p. 481-487.
- [2] AVINYÓ, A.; SOLÀ-MORALES, J.; VALÈNCIA, M. «On Maps with Given Jacobians Involving the Heat Equation». *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, vol. 54 (2003), p. 919-936.
- [3] AVINYÓ, A.; SOLÀ-MORALES, J.; VALÈNCIA, M. «On the Diffusion Algorithm for Density-Equalizing Maps with Piecewise Constant Initial Data». *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 35 (2012), p. 1234-1240.
- [4] AVINYÓ, A.; SOLÀ-MORALES, J.; VALÈNCIA, M. «A Singular Initial Value Problem to Construct Density-Equalizing Maps». *Journal of Dynamics and Differential Equations*, vol. 24 (2012), p. 51-59.
- [5] DORLING, D. *Area Cartograms: Their Use and Creation*. Durham: University of East Anglia: Institute of British Geographers, 1996. (Concepts and Techniques of Modern Geography; 59)
- [6] DORLING, D.; NEWMAN, M. E. J.; BARFORD, A. *The Atlas of the Real World: Mapping the Way we Live*. Londres: Thames & Hudson, 2008.
- [7] FELIU, J. elmapacomaexcusa.blogspot.com.es.
- [8] GASTNER, M. T.; NEWMAN, M. E. J. «Diffusion-Based Method for Producing Density-Equalizing Maps». *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 101 (2004), p. 7499-7504.
- [9] HENNIG, B. *Rediscovering the World: Map Transformations of Human and Physical Space*. Heidelberg; Nova York; Dordrecht; Londres: Springer, 2013.

[10] TOBLER, W. R. «Thirty-Five Years of Computer Cartograms». *Annals of the Association of American Geographers*, vol. 94 (2004), p. 58-73.

[11] Projecte Worldmapper. www.worldmapper.org.

